PART5 相加平均と相乗平均

要点 ① 相加平均と相乗平均の大小関係

2 つの実数 a，b について，$\dfrac{a+b}{2}$ を a と b の「　　　　　」という。

また，$a>0$，$b>0$ のとき，$\sqrt{ab}$ を a と b の「　　　　　」という。

例　2 数 7 と 28 について

相加平均は　　　　$=\dfrac{35}{2}$　　　相乗平均は　　　　$=\sqrt{7\cdot 7\cdot 2^2}=14$

一般に，相加平均と相乗平均には，次の大小関係が成り立つ。

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

等号が成り立つのは，$a=b$ のとき

（証明）

$a>0$，$b>0$ のとき，$\dfrac{a+b}{2}$ と $\sqrt{ab}$ の平方の差を考えると

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2-(\sqrt{ab})^2=\frac{a^2+2ab+b^2}{4}-ab=\frac{a^2-2ab+b^2}{4}=\frac{\qquad\qquad}{4}$$

よって　$\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\geqq(\sqrt{ab})^2$

$\dfrac{a+b}{2}>0$，$\sqrt{ab}>0$ であるから，$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$

等号が成り立つのは　　　　　，すなわち $a=b$ のときである。

$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$　$\Leftrightarrow$　$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ であり，不等式の証明においては，$a+b\geqq 2\sqrt{ab}$ の形で用いられることが多い。

※$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$ は $a\geqq 0$，$b\geqq 0$ のときも成り立つ。

[MEMO]

5 $x>0$ のとき，不等式 $x+\dfrac{4}{x} \geqq 4$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

Point Pickup

相加平均と相乗平均の大小関係

$a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$　…　(相加平均)$\geqq$(相乗平均)

等号成立は $a=b$ のときである。

また，$\dfrac{a+b}{2} \geqq \sqrt{ab}$ は $a+b \geqq 2\sqrt{ab}$ の形で用いられることが多い。

第 2 講　PART5 確認問題

1 $x>0$ のとき，次の不等式を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geqq 2$$

[証明]

$\frac{x}{2}>0$，$\frac{2}{x}>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geqq \boxed{\text{ア}}\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}}$$

よって　$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geqq \boxed{\text{イ}}$

等号が成り立つのは

$$\frac{x}{2}=\frac{\boxed{\text{ウ}}}{x}$$

つまり $x^2=\boxed{\text{エ}}$ のときで，$x>0$ より $x=\boxed{\text{オ}}$ のとき

である。

PART5 相加平均と相乗平均

5 $x>0$ のとき，不等式 $x+\dfrac{4}{x}\geqq 4$ を証明せよ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

[解答]

$x>0$，$\dfrac{4}{x}>0$ より，相加平均と相乗平均の大小関係から

$$x+\frac{4}{x}\geqq 2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}=2\cdot2=4$$

よって　$x+\dfrac{4}{x}\geqq 4$

等号が成り立つのは $x=\dfrac{4}{x}$，つまり $x^2=4$ のときで，$x>0$ より $x=2$ のときである。

第 2 講　PART5 確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：2，ウ：2，エ：4，オ：2

[解説]

$\dfrac{x}{2}>0$，$\dfrac{2}{x}>0$ より，相加平均と相乗平均の関係から

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geqq 2\sqrt{\frac{x}{2}\cdot\frac{2}{x}}$$ [A]

$$\frac{x}{2}+\frac{2}{x}\geqq 2\cdot 1$$

よって　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x}\geqq \mathbf{2}$

等号が成り立つのは

$$\frac{x}{2}=\frac{\mathbf{2}}{x}$$

つまり

$$x^2=\mathbf{4}$$

のときで，$x>0$ より $x=\mathbf{2}$ のときである。

[A]　相加平均と相乗平均の大小関係
$a>0$，$b>0$ のとき　$\dfrac{a+b}{2}\geqq\sqrt{ab}$
（等号成立は $a=b$ のとき）